Sociedad Nuclear Mexicana A.C.
Primer Congreso Anual

SNM

MEMORIAS

Noviembre de 1990
Museo Tecnológico, CFE
Ciudad de México

SOLUCION SIMPLIFICADA DE ECUACIONES DE TRANSPORTE NO COLISIONALES

Apolonio Gallegos Cruz [+] y Jorge Pérez-Peraza [*+]
+Instituto Nacional de Astrofísica Optica y Electrónica. A.P. 51 y 216
Puebla 72000, Pue., MEXICO.
*Instituto de Geofísica, UNAM, 04510 C.U. México, D.F. MEXICO.

RESUMEN. Se propone un enfoque para simplificar la resolución de ecuaciones de transporte no-colisionales, mediante el empleo del método WKBJ. Esta técnica se ilustra para el caso de ecuaciones del tipo Fokker-Planck. Se discute el alcance y la utilidad del método en el tratamiento de problemas específicos.

ABSTRACT. It is proposed a technique to simplify the resolution of collisionless transport equations on basis to the WKBJ method. This technique is illustrated with the resolution of a Fokker-Planck type equation. It is discussed the limitation of the method for the application to specific problems.

1. INTRODUCCION. La necesidad de resolver ecuaciones de transporte es un problema que aparece en varios campos de la ciencia, particularmente en diversas disciplinas de la física. Entre los métodos más utilizados con este objetivo se pueden citar el empleo de Funciones Bessel, Transformadas de Laplace, Funciones de Green, etc. En general, estos métodos no son siempre aplicables a todo tipo de ecuación de transporte, sino únicamente cuando estas pueden ser reducidas a una ecuación de forma muy específica (ec. de Legendre, Bessel, etc.). El método aquí propuesto permite abordar una gama más amplia de problemas ya que basta que la ecuación de transporte pueda ser reducida a una

ecuación diferencial de 2° orden de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)y = 0 \tag{1}$$

2. METODO. El método WKBJ fue propuesto por Jeffreys y desarrollado posteriormente por Wentzel, Kramers y Brillouin para resolver la ecuación de Schrodinger. La esencia del método consiste en una iteración alrededor de una función f(x) considerada constante al inicio del proceso iterativo, de tal forma que el márgen de utilidad de este método depende sensiblemente de que f(x) sea una función que varíe lentamente. Así entonces, dada una ec. de transporte de la forma:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial y}{\partial x} + h(x)y = j(x) \tag{2}$$

esta puede ser reducida a una ecuación diferencial total no-homogénea usando la Transformada de Laplace. Mediante el cambio de variable[1] $v(x)=y(x)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int g(x')dx'\right\}$ en esa ecuación inhomogénea obtenemos una ecuación de la forma (1) con un término en el miembro derecho. Se procede a obtener la solución de la parte homogénea, y a continuación mediante el método de Variación de Parámetros se generaliza para obtener la solución inhomogénea. La solución aproximada de la homogénea, ec.(1), se obtiene por el método WKBJ, tomando f(x)= constante, de tal forma que la solución así obtenida $y=\exp\left[i\,\phi(x)\right]$ se substituye nuevamente en la ec. (1). En la ec. resultante se considera que $\phi''(x)$ es muy pequeña, ya que se asume una variación muy lenta de f(x), por lo que (x) puede ser despreciada, obteniéndose la solución siguiente:

$$y(x) \approx \frac{1}{f^{\frac{1}{4}}(x)}\left\{C_+\exp\left[i\int f^{\frac{1}{2}}(x')dx'\right] + C_-\exp\left[-i\int f^{\frac{1}{2}}(x')dx'\right]\right\} \tag{3}$$

en donde C+ y C- son constantes a determinar acorde a las condiciones de frontera del problema. La suposición de que $\phi''(x)$ sea lo suficientemente pequeña para despreciarse se expresa como:

$$\left|\phi''(x)\right| \approx \frac{1}{2}\left|\frac{f'(x)}{f^{\frac{1}{2}}(x)}\right| << \left|f(x)\right| \tag{4}$$

Para ilustrar el alcanze y aplicabilidad de este método se puede ejemplificar resolviendo la ec. diferencial parcial no-homogénea del tipo Fokker-Planck[2] que se deriva de la ec. de difusión en el espacio de momentos, acorde a la ec. de transporte de Boltzman en el regimen no-colisional[3]

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial E}\left[\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle N\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial E^2}\left[\left\langle\frac{(dE)^2}{dt}\right\rangle N\right] - \frac{N}{\tau} + Q(E,t) \tag{5}$$

En esta ec. de evolución de una cierta distribución energética, N(E,t), el cambio sistemático de energía esta expresado por $\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle$=A(E), en tanto que $\left\langle\frac{(dE)^2}{dt}\right\rangle$=D(E) es la difusión alrededor de la taza sistemática de variación de energía, τ es el tiempo característico de desaparición de partículas del volúmen en consideración y Q(E,t) es el flujo de inyección dentro de los procesos que tienen lugar en el volúmen considerado.

3. <u>APLICACION DEL METODO AL EJEMPLO PROPUESTO</u>. Aplicando en la ecuación diferencial parcial (5) el cambio de variable N=Y/D, la ecuación resultante puede ser transformada en una ecuación diferencial total por la técnica de la Transformada de Laplace

$$\frac{d^2\bar{y}}{dE^2} + F_1(E)\frac{d\bar{y}}{dE} + F_2(E)\bar{y} = F_3(E) \tag{6}$$

en donde $\bar{y}$(E,S) es la transformada de Laplace de la función Y(E,t).

Definiendo $F_4(E)=\exp\left\{\int^{E} F_1(E')dE'\right\}$ y la nueva variable $\eta(E)=\int^{E} F_4^{-1}(E')dE'$ (donde E' indica la variable de integración en el espacio de energía), tal que $dy/dE=F_4^{-1}(dy/d\eta)$, y, $d/dE=F_4^{-1}(d/d\eta)$, la ecuación (6) puede ser reducida a la forma siguiente:

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\eta^2}+R(\eta)\bar{y}=S(\eta) \tag{7}$$

en donde $R(\eta)=F_2(\eta)F_4^2(\eta)$ y $S(\eta)=F_3(\eta)F_4^2(\eta)$. **Mediante** el método WKBJ descrito en Sección 1, se obtiene la solución de la parte homogénea de ec. (7),

$$\bar{y}(\eta,s)=J_+\bar{y}_+(\eta)+J_-\bar{y}_-(\eta) \tag{8}$$

en donde

$$\bar{y}_\pm(\eta,s)=\exp\left\{\mp\int^{\eta(E)}\left[-R(\eta')\right]^{\frac{1}{2}}d\eta'\right/\left[-R(\eta')\right]^{\frac{1}{4}} \tag{9}$$

Usando ahora el método de Variación de Parámetros, (o el de Funciones Green) podemos construir la solución general de (7), usando las soluciones (8) de la homogénea, lo que conduce a la solución siguiente:

$$\bar{y}_G(\eta,s)=J_+\bar{y}_+(\eta,s)+\frac{1}{2}\bar{y}(\eta,s)\int^{\eta}\bar{y}_-(\eta',s)F_5(\eta',s)\,d\eta' \tag{10}$$

en donde $F_5(\eta',s)=F_3(\eta)F_4^2(\eta)$, en tanto que J- desaparece por condiciones de frontera, en virtud de que la función debe tender a cero conforme la variable Energía crece.

Designando $A(E)=\langle dE/dt\rangle$ y $D(E)=\langle (dE)^2/dt\rangle$, así como

$a-a^*=\int_{\eta(E')}^{\eta(E)}2^{\frac{1}{2}}dE'/D^{\frac{1}{2}}(E')$, y $Q^*=\frac{dA}{dE}-(A/D)\frac{dD}{dE}$, y aplicando la

Antitransformada de Laplace, obtenemos la solución buscada de ec. (5),

$$N(E,t)=N_{th}(E_i)\frac{D^{3/4}(E_i)}{D^{3/4}(E)}\left[\int_{E_{\ell,i}}^{E_\ell}\frac{z^{1/2}dE'}{D^{1/2}(E')}\right]\exp\left[\int_{E_\ell}^{E}\frac{A(E')dE'}{D(E')}\right]\int_0^t\frac{0.27\,dt'}{(2\pi t')^{1/2}(t-t')^{3/4}}\times$$

$$\exp\left[-\left(a^*+\frac{1}{\tau}\right)t'-\frac{(a-a^*)^2}{4t'}\right]+\frac{1.4}{(\pi t)^{1/2}D^{3/4}(E)}\exp\left[-\left(a^*+\frac{1}{\tau}\right)t+\int_{E_i}^{E}\frac{A(E')dE'}{D(E')}\right]\times$$

$$\int_{E_{\ell,s}}^{E_\ell}N(E',0)D^{1/4}(E)\exp\left[-\int_{E_i}^{E'}\frac{A(E'')dE''}{D(E'')}-\frac{(a-a^*)^2}{4t}\right]dE'+\frac{0.7}{D^{3/4}(E)}\exp\left[\int_{E_i}^{E}\frac{A(E')dE'}{D(E')}\right]\times$$

$$\int_{E_{\ell,s}}^{E_\ell}q(E')D^{\frac{1}{4}}(E')\exp\left[\int_{E_i}^{E'}\frac{A(E'')dE''}{D(E'')}\right]\int_0^t\frac{dt'}{(\pi t')^{1/2}}\exp\left[-\left(a^*+\frac{1}{\tau}\right)t'-\frac{(a-a^*)^2}{4t}\right] \qquad (11)$$

en donde $E_\ell(E)=\eta(E)$, $E_{\ell,i}=E_\ell(E_i)=\eta(E_i)$, $E_{\ell,s}=E_\ell(E_s)=\eta(E_s)$, donde E_i y E_s son energía iniciales del problema y $N_{th}(E_i)$ es una constante de integración identificada con el flujo inicial (o latente) de energía. Soluciones del tipo acabadas de desarrollar son a menudo empleadas en el estudio del espectro de energía de partículas aceleradas en ciertas fuentes generadoras[3,4], por lo que se justifica la desaparición de J- en (10)

4. <u>VALIDEZ DEL METODO EN EL EJEMPLO PROPUESTO</u>. Para justificar el método acorde a la restricción (4), dos tazas de variación de energía E, pueden ser ejemplificadas[4],

a) $\langle dE/dt\rangle=\alpha\beta E$ con $\langle (dE)^2/dt\rangle=\alpha\beta^3E^2$

en donde β es velocidad en función de la velocidad de la luz, y α es la eficiencia del proceso de variación de energía. Dado que f(x) en ec. (1) corresponde a $R(\eta)$ en ec. (7) la condición dada en ec. (4) puede reescribirse como $P(\eta)=\frac{1}{2}\left|\frac{dR/d\eta}{R^{3/2}}\right|\ll 1$, si utilizamos la forma explicita de $R(\eta)$ nos queda $P(\eta)=(\alpha\tau/4\beta)^{\frac{1}{2}}\left|1.5-\beta^2\right|$, con $\beta=(E^2-m^2c^4)^{\frac{1}{2}}/E$. De la relación $P(\eta)$ se observa que la validez del método en este ejemplo depende de los valores de α y τ. En la fig.

1 se ilustra el comportamiento de esta relación para los casos particulares en que $\alpha\tau$=0.1 y $\alpha\tau$=0.05. El análisis de esta fig. nos indica que para estos parámetros particulares el método tiene mayor validez a medida que $\beta \to 1.0$ en tanto que para valores pequeños de E($\beta \lesssim 0.4$) para electrones energéticos) el método WKBJ no es aplicable.

b) $\langle dE/dt \rangle = \alpha(5-\beta^2)\beta^2 E$ con $\langle (dE)^2/dt \rangle = 2\alpha\beta^4 E^2$ Similarmente al caso anterior la condición de validez del método ec. (4) se reduce a $P(\eta) = \left[(\alpha\tau)^{\frac{1}{2}}/4\right] \left|1-5\beta^2\right| \ll 1.0$. Observamos entonces que para dos conjuntos dados de parámetros, $\alpha\tau$ =0.1 y $\alpha\tau$ =0.05, el método es solamente válido para energía E tales que $\beta \gtrsim 0.85$, como se muestra en la Fig. 1.

5. DISCUSION. El método WKBJ es aplicable a ecs. diferenciales parciales como son las ec. de transporte y difusión, mediante su reducción a una ec. de la forma (1), por diversas técnicas matemáticas complementarias como la Transformada de Laplace, Funciones de Green, Método de Variación de pará-

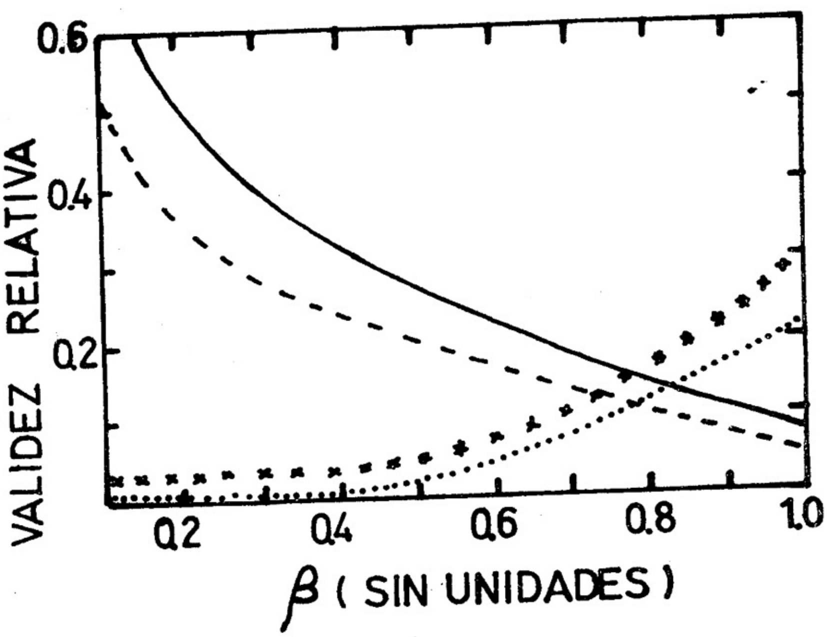

Fig. 1. Rango de validez del metodo WKBJ, $\alpha\tau$ =0.1: ejemplo (a) (——), ejemplo (b) (----) y $\alpha\tau$ = 0.05: ejemplo (a) (****), ejemplo (b) (····)

metros y otras. La aplicabilidad del método depende básicamente de la validez de la condición (3), lo cual a su vez depende de las características particulares del problema a resolver. La ventaja de este método es que la gama de problemas que se pueden abordar es más amplia que con otros métodos, dado que la f(x) puede tomar cualquier forma, y que en general su aplicación puede ser más sencilla que con los métodos que emplean funciones matemáticas con cierto grado de complejidad. Este método es particularmente interesante en el estudio de las distribuciones de energía y perfiles temporales de partículas energéticas.

6. REFERENCIAS

1. Mathews, J. y Walker, R.L., Mathematical Methods of Physics, W.A. Benjamin Inc. (1973).
2. Ginsburg, V.L. y Syrovatskii, S.I., Origin of Cosmic Rays. Pergamon Press (1964).
3. Melrose, D.B., Plasma Astrophysics. Vol. II. Gordon and Breach (1980).
4. Pérez-Peraza, J. y Gallegos-C.A., Fundaments of Cosmic Physics (en arbitraje).